

ASIMETRÍA COGNITIVA DE LAS LEYES DE DeMORGAN

Guillermo Macbeth¹

Rodrigo Albano Sosa²

Ignacio Ernesto Genovese²

Universidad del Salvador (IIPUS)

RESUMEN

El propósito del presente estudio de revisión es describir y discutir el significado de los primeros hallazgos experimentales relativos a la asimetría cognitiva de las leyes lógicas atribuidas a Augustus DeMorgan. Estas leyes formales, relacionadas con dos equivalencias lógicas para la negación de conjunciones y disyunciones, se conocen desde la Edad Media y han sido señaladas actualmente por los psicólogos de la lógica como relevantes para la comprensión del pensamiento humano. Sin embargo, sólo recientemente se han realizado estudios experimentales para describir el comportamiento mental de las personas ante tareas que las emplean. Se ha encontrado que la ley de conjunciones es más difícil de reconocer que la ley de disyunciones. Se discute en este artículo la posibilidad de explicar esta asimetría mediante el empleo de conceptos propios de la teoría de los modelos mentales. Se

¹ Doctor en Psicología. Miembro de la Carrera de Investigador Científico del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina. Se desempeña actualmente como investigador en el Instituto de Investigaciones Psicológicas de la Universidad del Salvador (IIPUS). Es director del grupo de investigación sobre Pensamiento, Razonamiento y Toma de Decisiones del IIPUS. Sus investigaciones tratan sobre psicología matemática y, en particular, sobre razonamiento deductivo y toma de decisiones bajo incertidumbre. Dr. Guillermo Macbeth. Instituto de Investigaciones Psicológicas de la Universidad del Salvador (IIPUS). Marcelo T. de Alvear 1314 (C1058AAV), 1º piso, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina. Teléfono: (+5411)-4813-3404

Websites: <http://iipus.webs.com> / <http://mathpsychology.weebly.com>

E-mail: g.macbeth@conicet.gov.ar / guimacbeth@hotmail.com

² Estudiante de Psicología de la Universidad del Salvador. Miembro del grupo de investigación sobre Pensamiento, Razonamiento y Toma de Decisiones del Instituto de Investigaciones Psicológicas de la Universidad del Salvador (IIPUS).

presentan diversos argumentos y se recomienda realizar nuevos estudios experimentales para poner a prueba esta conjetura de asimetría.

Palabras clave: lógica, razonamiento, leyes de DeMorgan, modelos mentales

ABSTRACT

COGNITIVE ASYMMETRY OF DeMORGAN´S LAWS

The aim of this review is to describe and discuss about the meaning of the first findings concerning the cognitive asymmetry of DeMorgan´s laws of logic. These formal laws state equivalences for the negation of conjunctions and for the negation of disjunctions. Its existence and properties are known since the Middle Ages, and have been recently acknowledged as relevant for the understanding of the human mind. Though, the first experimental studies have only recently been conducted. The results suggest that the law for disjunctions is more intuitive than the law for conjunctions. This evidence is unexpected in coherence with the state-of-the-art, but consistent with the mental models approach to the study of human reasoning. The meaning of this evidence is presented and discussed in this contribution. Finally, some suggestions for further experimental work are presented.

Key Words: logic, reasoning, DeMorgan´s laws, mental models

Psicología de la lógica

La lógica, entendida desde una perspectiva científica, puede ser definida de diversas maneras (Suples & Hill, 1992). Así, los expertos consideran que la lógica es (Kantor, 1945): *i)* el estudio de las leyes del pensamiento, *ii)* la ciencia del orden y la forma, *iii)* una colección de técnicas especializadas en la construcción de teorías matemáticas, *iv)* una metodología general de las ciencias, *v)* el arte de la demostración formal y, *vi)* una teoría general de la investigación. Estas definiciones, más allá de las diversas epistemologías que en cada caso asumen, consideran que el estudio de la lógica posee un componente psicológico. Algunos lógicos que han contribuido significativamente con la sistematización de esta disciplina, como George Boole y Augustus DeMorgan, han afirmado incluso que la lógica consiste en la formalización de los patrones de procesamiento que la mente humana emplea cuando razona adecuadamente (DeMorgan, 1847; Kantor, 1945). En este sentido, desde la perspectiva de las ciencias formales resulta legítima la postulación de una psicología de la lógica (Fernández Berrocal & Carretero, 1995). Recíprocamente, la psicología se ha ocupado de investigar el razonamiento humano desde sus comienzos (García Madruga, Gutiérrez, Carriedo, Moreno & Johnson-Laird, 2001). Al respecto, en un estudio reciente, Stenning y Lambalgen (2008) sostienen que la lógica y la psicología poseen una larga historia de interacción que se encuentra actualmente en una etapa de refundación epistemológica. La psicología de la lógica resulta relevante, de esta manera, tanto desde la perspectiva de la lógica, como desde la perspectiva de la psicología (Rips, 1994; Santamaría, 1995).

En este contexto, la actual psicología de la lógica se encuentra discutiendo un problema fundamental que posee importantes consecuencias metodológicas: ¿cuáles son los criterios adecuados para la construcción de modelos cognitivos que expliquen el procesamiento psicológico de estructuras lógicas? Este problema también ha sido entendido como una discusión filosófica entre el enfoque sintáctico y el enfoque semántico (Gigerenzer, 2007; Rader & Sloutsky, 2001). El primero podría ser definido como el procedimiento por el cual se compara la evidencia obtenida en experimentos cognitivos de laboratorio psicológico con patrones formales universales, que algunos autores describen como platónicos (Kantor, 1945). En este caso, la psicología de la lógica es una disciplina normativa (Braine, 1978; Kahneman & Klein, 2009). El enfoque semántico, en cambio, enfatiza la relevancia de las imágenes mentales, las representaciones dinámicas, las limitaciones de la memoria humana y otros aspectos

psicológicos que pueden ser considerados como no-formales o extrínsecos respecto de las estructuras platónicas que algunos autores identifican con el campo específico de la lógica (Carriedo, Moreno, Gutiérrez & García Madruga, 1998; Stenning y Lambalgen, 2008). En este caso, la psicología de la lógica posee una función descriptiva y los criterios de comparación para la evidencia experimental no son necesariamente los universales o platónicos, sino que se admiten múltiples patrones. Esta discusión se encuentra abierta y en plena revisión en el campo de la psicología y de la lógica (Stenning & Lambalgen, 2008).

Durante las últimas décadas, el enfoque sintáctico o formalista se ha ocupado de construir teorías cognitivas que pretenden explicar el reconocimiento espontáneo de estructuras formales relacionadas con diversas leyes lógicas y reglas de inferencia (Rips, 1994). El enfoque sintáctico, por su parte, se ha configurado como una teoría psicológica de gran alcance centrada en el concepto de modelos mentales (Johnson-Laird, 1983; Johnson-Laird, Byrne & Schaeken, 1994). Los modelos mentales son imágenes dinámicas que representan patrones elementales de situaciones del mundo real mediante esquemas abstractos (Martín & Valiña, 2002).

Tanto el enfoque sintáctico, como el enfoque semántico de la psicología de la lógica actual afirman que las leyes formales atribuidas a Augustus DeMorgan, relacionadas con la negación de conjunciones y disyunciones, resultan relevantes para la comprensión del pensamiento humano (Macbeth, Razumiejczyk & Fernández, 2010). Si bien se considera que el estudio de este problema admite diversos abordajes, tal como lo señalan estudios recientes sobre el estado actual de la psicología de la lógica (Stenning & Lambalgen, 2008), se asume aquí el criterio normativo. Se considera que es legítima la comparación entre las leyes de DeMorgan, entendidas como formas universales o platónicas, y la evidencia experimental obtenida en estudios empíricos cognitivos. Así, los objetivos del presente estudio de revisión son: *i*) describir los principales hallazgos experimentales que describen el comportamiento humano espontáneo en tareas de reconocimiento de las leyes de DeMorgan en el campo del cálculo proposicional y, *ii*) postular una asimetría cognitiva para estas leyes. El aporte principal de esta contribución consiste en proponer que el procesamiento cognitivo de la ley de negación de conjunciones difiere sistemáticamente del procesamiento de la ley de negación de disyunciones.

Las leyes lógicas de Augustus DeMorgan

Aunque se dispone de evidencia histórica sobre escritos medievales que prueban el conocimiento temprano de las equivalencias lógicas correspondientes a la negación de conjunciones y disyunciones (Muñoz García, 2005), se atribuye actualmente a Augustus DeMorgan (1806-1871) la formalización de dos leyes específicas que establecen relaciones bicondicionales tautológicas para proposiciones compuestas. En este contexto, una proposición es una sentencia declarativa de la que tiene sentido afirmar si es verdadera o falsa. Es decir, a tal sentencia se le puede atribuir, o bien verdad, o bien falsedad, pero ninguna otra alternativa es admisible (Suppes & Hill, 1992). Esta lógica es conocida como lógica clásica y difiere de las lógicas no-clásicas que admiten valores intermedios, como por ejemplo la lógica difusa de Lukasciewicz (Stenning & Lambalgen, 2008). En la lógica clásica, una tautología o ley lógica es definida como una figura proposicional compuesta que resulta siempre verdadera, independientemente del valor de verdad de sus proposiciones simples. La primera ley de DeMorgan sostiene que la negación de una conjunción compuesta de la forma $p \wedge q$ equivale a la disyunción de las proposiciones simples negadas (Richardson & Ermerod, 1997). Aquí p y q son proposiciones y el conector \wedge es una conjunción. La segunda ley de DeMorgan establece que la negación de una disyunción de tipo $p \vee q$, donde \vee indica disyunción, equivale a la conjunción de las proposiciones simples negadas. Es decir, siendo p y q dos proposiciones simples cualesquiera, unidas en una proposición compuesta por una conjunción o una disyunción, sus equivalentes lógicos toman la forma de las expresiones (1) y (2), respectivamente (Suples & Hill, 1992).

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \quad (1)$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \quad (2)$$

El símbolo \neg indica negación y \Leftrightarrow expresa equivalencia lógica, es decir, que el bicondicional resulta tautológico. En las Tablas 1 y 2 se presentan las tablas de verdad que ilustran las leyes (1) y (2), respectivamente.

Tabla 1**Tabla de verdad para la ley (1) de DeMorgan**

\neg	$(p$	\wedge	$q)$	\Leftrightarrow	\neg	p	\vee	\neg	q
F	V	V	V	V	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V	F

Tabla 2**Tabla de verdad para la ley (2) de DeMorgan**

\neg	$(p$	\vee	$q)$	\Leftrightarrow	\neg	p	\wedge	\neg	q
F	V	V	V	V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V	F

Las expresiones (3), (4), (5) y (6) presentan una demostración formal de estas leyes mediante el empleo de la teoría de conjuntos. Se considera para ello que la representación conjuntista de la conjunción lógica es la intersección \cap , de la disyunción es la unión \cup y de la negación es la complementación $\bar{}$. La equivalencia lógica entre proposiciones toma la forma de igualdad o doble inclusión en teoría de conjuntos. Dadas estas condiciones y siendo P y Q dos conjuntos no vacíos cualesquiera, la pertenencia simultánea de un elemento arbitrario x a $\overline{P \cap Q}$ y a $\overline{P \cup Q}$ prueba la equivalencia de la ley (1), como se indica en (3) y (5). Lo mismo ocurre con las expresiones (4) y (6), que prueban la ley (2).

$$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q} \quad (3)$$

$$\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q} \quad (4)$$

$$x \in \overline{P \cap Q} \Leftrightarrow x \notin (P \cap Q) \Leftrightarrow x \notin P \vee x \notin Q \Leftrightarrow x \in \overline{P} \vee x \in \overline{Q} \Leftrightarrow x \in (\overline{P} \cup \overline{Q}) \quad (5)$$

$$x \in \overline{P \cup Q} \Leftrightarrow x \notin (P \cup Q) \Leftrightarrow x \notin P \wedge x \notin Q \Leftrightarrow x \in \overline{P} \wedge x \in \overline{Q} \Leftrightarrow x \in (\overline{P} \cap \overline{Q}) \quad (6)$$

Hallazgos experimentales sobre asimetría cognitiva de las leyes de DeMorgan

En un experimento cognitivo reciente (Macbeth *et al.*, 2010) se ha encontrado que la ley de negación de la disyunción, expresada en (2), es más intuitiva que la ley de negación de la conjunción, expresada en (1). Es decir, la ley (2) se reconoce con mayor frecuencia que la ley (1). Este resultado se ha obtenido mediante tareas experimentales que emplean el cálculo proposicional (García Madruga, Moreno, Carriedo, Gutiérrez & Johnson-Laird, 2001). Mediante un procedimiento *on-line* se recolectaron las respuestas de una colección aleatoria de sujetos que debían encontrar, entre varias alternativas posibles, una expresión lógicamente equivalente a otra expresión dada. La proposición dada incluía la negación de una conjunción o la negación de una disyunción. Se incluyeron cinco tareas para cada variedad, es decir, diez tareas en total. En la Figura 1 se presenta una captura de imagen de la tarea *on-line*.

Figura 1

Captura de imagen del cuestionario lógico *on-line*



Se encontró que el promedio de reconocimiento de las equivalencias para la negación de disyunciones resultó significativamente mayor que para el caso de la negación de conjunciones. Adicionalmente, se halló que los errores en el reconocimiento de la ley (1) fueron aleatorios, pero los errores en el reconocimiento de la ley (2) presentaron un patrón típico y dominante.

Esta evidencia sugiere que la intuición de las leyes de DeMorgan es asimétrica a favor de la ley (2). Debido a que la revisión de los conocimientos previos sugiere que la ley (1) debería ser más fácil de reconocer que la ley (2), se propuso una justificación provisoria que requiere nuevas pruebas experimentales (Macbeth *et al.*, 2010). Los antecedentes sugieren sistemáticamente que el procesamiento de conjunciones es más sencillo y económico computacionalmente que el procesamiento de disyunciones (Rader & Sloutsky, 2001), por lo cual se infiere que la ley (1), que opera sobre conjunciones, debe ser más fácil de procesar que la ley (2), que opera sobre disyunciones.

Se ha propuesto que estos hallazgos experimentales pueden ser explicados en el contexto de la teoría de los modelos mentales (Fumero, Santamaría & Johnson-Laird, 2010). Para ello se ha advertido que el escenario mental sobre el cual se aplican las negaciones es diferente para las leyes (1) y (2). En el caso de cualquier conjunción, el modelo mental es único y unívoco e incluye sólo un escenario en el que coexisten todos los elementos afirmados. En cambio, el mundo de las disyunciones es múltiple y diverso. Supóngase que el escenario básico consiste en una mesa sobre la que se pueden presentar diversos utensilios, por ejemplo, un plato y un vaso. Para construir la representación mental de la ley (1) se necesita la imagen de la mesa y los dos objetos sobre ella. Es decir, la negación que opera la ley (1) ocurre sobre un escenario que incluye un plato y un vaso apoyados sobre una mesa. Este escenario es único, es decir, no se requieren representaciones alternativas para completar el mundo mental sobre el cual operará la negación a la que alude la ley (1). El caso de la ley (2) es completamente diferente. El escenario básico no es unívoco, sino que incluye dos alternativas posibles que pueden ser consideradas como dos escenarios simultáneos. Es decir, para poder negar una disyunción se requieren dos mundos en los que existen, alternativamente, uno elemento o el otro. En un caso se dispone de una mesa con un plato, en otro caso se posee una mesa con un vaso. En la mesa con un plato no hay vaso. En la mesa con un vaso no hay plato. En síntesis, el escenario básico de la ley (1) posee una única imagen mientras que el escenario básico de la ley (2) posee dos

imágenes alternativas. Sobre estos escenarios básicos opera la negación de las leyes de DeMorgan, de manera que ocurre una inversión de la cardinalidad (#) de los modelos mentales. La negación en (1) obliga a construir dos escenarios posibles, uno que incluye sólo un plato sobre la mesa, otro que sobre la mesa incluye sólo un vaso. De esta manera, la ley (1) pasa de #1 a #2, por lo cual se trata de una operación de consumo mental creciente. La ley (2), en cambio, al negar el escenario básico dual se reduce a un único escenario en el que se dispone sólo de una mesa. Sobre la mesa no hay plato ni vaso. Así, el algoritmo mental de la ley (2) es decreciente porque pasa de #2 a #1.

Se propone en esta revisión que la asimetría cognitiva de las leyes de DeMorgan se explica por la economía computacional, de manera que la función decreciente de la ley (2) resulta coherente con su mayor reconocimiento en comparación con la función creciente de la ley (1).

Discusión y conclusiones

Si bien se ha señalado en la psicología de la lógica que la cognición de las leyes de DeMorgan son relevantes para la comprensión de la mente humana, sólo recientemente se han realizado estudios experimentales que permiten describir su procesamiento cognitivo espontáneo. Los hallazgos de Macbeth y otros (2010) sugieren que el reconocimiento de estas leyes es asimétrico, de manera que la ley (2), relacionada con la negación de disyunciones, resulta más fácil de intuir que la ley (1), que opera mediante la negación de conjunciones. Este resultado es coherente con el enfoque de los modelos mentales, en tanto la ley (1) presenta un gasto computacional creciente, mientras que la ley (2) realiza un gasto decreciente. La ley (1) pasa de menos a más y la ley (2) pasa de más a menos, en el sentido de carga computacional que emplean autores como Gigerenzer (2007). Este heurístico es provisorio, conjetural y requiere contrastación experimental. La hipótesis de asimetría, sin embargo, no se infiere del estado del arte, es decir, se trata de una contribución novedosa. Por el contrario, la revisión de los modelos de razonamiento, tanto los sintácticos, como los semánticos, pronostican que las inferencias que operan con conjunciones son más fáciles que las que operan sobre disyunciones. Es decir, el análisis de los antecedentes sugiere que la ley (1) debería ser más fácil de reconocer que la ley (2), lo cual es incompatible con los hallazgos de Macbeth y otros (2010). Para explicar este resultado

novedoso, se recomienda realizar nuevos experimentos que permitan manipular la carga cognitiva de las tareas, por ser considerada aquí como variable independiente crítica, y medir la frecuencia de reconocimiento de las leyes de DeMorgan.

REFERENCIAS

- Braine, M. D. S. (1978). On the relation between the natural logic of reasoning and standard logic. *Psychological Review*, 85, 1-21.
- Carriedo, N., Moreno, C., Gutiérrez, F., & García Madruga, J. A. (1998). Modelos mentales en conjunciones, disyunciones y condicionales: Replicación de un estudio de Rips. En M. D. Valiña & M. J. Blanco (Eds.), *Actas de las I Jornadas de Psicología del Pensamiento* (pp. 39-56). Santiago de Compostela, España: Universidad de Santiago de Compostela.
- DeMorgan, A. (1847). *Formal logic or the calculus of inference necessary and probable*. Londres: Taylor & Walton.
- Fernández Berrocal P., & Carretero, M. (1995). Perspectivas actuales en el estudio del razonamiento. En M. Carretero, J. Almaraz, & P. Fernández Berrocal (Eds.), *Razonamiento y comprensión* (pp. 13-46). Madrid: Trotta.
- Fumero, A., Santamaría, C., & Johnson-Laird, P. N. (2010). Ways of thinking: Personality affects reasoning. *Psicothema*, 22, 57-62.
- García Madruga, J. A., Gutiérrez, F., Carriedo, N., Moreno, S., & Johnson-Laird, P. N. (2001). Mental models in deductive reasoning. *The Spanish Journal of Psychology*, 5, 125-140.
- García Madruga, J. A., Moreno, S., Carriedo, N., Gutiérrez, F., & Johnson-Laird, P. N. (2001). Are conjunctive inferences easier than disjunctive inferences? A comparison of rules and models. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 54, 613-631.
- Gigerenzer, G. (2007). *Gut feelings*. New York: Penguin Books.
- Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models. Towards a cognitive science of language, inference and consciousness*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Johnson-Laird, P. N., Byrne, R. M. J., & Schaeken, W. (1994). Why models rather than rules give a better account of propositional reasoning: A reply Bonatti and to O'Brien, Braine & Yang. *Psychological Review*, 101, 734-739.
- Kahneman, D. & Klein, G. (2009). Conditions for intuitive expertise. A failure to disagree. *American Psychologist*, 64, 515-526.
- Kantor, J.R. (1945). *Psychology and logic*. Chicago, Illinois: The Principia Press.

- Macbeth, G., Razumiejczyk, E. & Fernández, J.H. (2010). A decision making account for the cognitive processing of DeMorgan´s laws. *Revista Argentina de Ciencias del Comportamiento*, 2(2), 43-51.
- Martín, M. & Valiña, M. D. (2002). Razonamiento deductivo: Una aproximación al estudio de la disyunción. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 55, 225-248.
- Muñoz García, A. (2005). Sobre el origen de las leyes de Morgan. *Enlace*, 2, 13-36.
- Rader, A. & Sloutsky, V. (2001). Conjunctive bias in memory representations of logical connectives. *Memory & Cognition*, 29, 838-849.
- Richardson, J. & Ermerod, T. C. (1997). Rephrasing between disjunctives and conditionals: Mental models and the effects of thematic content. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 50A, 358-385.
- Rips, L. J. (1994). *The psychology of proof. Deductive reasoning in human thinking*. Cambridge, Mass.: MIT Press.
- Santamaría, C. (1995). Un análisis del razonamiento. En M. Carretero, J. Almaraz, & P. Fernández Berrocal (Eds.), *Razonamiento y comprensión* (pp. 47-57). Madrid, Spain: Trotta.
- Stenning, K., & van Lambalgen, M. (2008). *Human reasoning and cognitive science*. Cambridge, Mass.: MIT Press.
- Suppes, P. & Hill, S. (1992). *Introducción a la lógica matemática*. Barcelona: Reverté.